□03□ □□□□□:□□□□

□□□□□□□□□□

□□□□□□□27□□□

1□□2021•□□□□□□□□□ $f(x)=x-lnx-a$ □□□□□□□□ x_1 □ x_2 □

□1□□□□ a □□□□□□

□2□□□□ $x_1+x_2>a+1$ □

□□□□□□□1□ □□ $f(x)=x-lnx-a$

$\therefore f'(x)=1-\frac{1}{x}$□

□ $x\in(0,1)$ □□ $f'(x)<0$ □ $f(x)$ □□□□□

□ x □□ $f'(x)>0$ □ $f(x)$ □□□□□

□□ $x=1$ □□□□ $f(x)=x-lnx-a$ □□□□ $1-a$ □

□□□ $f(x)=x-lnx-a$ □□□□□□□□ x_1 □ x_2 □

□ $1-a<0$ □□ $a>1$ □

□□□□2□□□□ $f(x)=x-lnx-a$ □□□□□□□□ x_1 □ x_2 □□□□ $0<x_1<1<x_2$ □

□ $x_1-lnx_1=a$ □□ $x_2-lnx_2=a$ □

□□ $x_1+x_2>a+1$ □□□ $x_2>1-lnx_1$ □

□□□□ $g(x)=f(x)-f(1-lnx)$ □ $0<x<1$ □

□□ $g(x)=x-lnx-(1-lnx)+ln(1-lnx)=x-1+ln(1-lnx)$ □

□□ $g'(x)=1-\frac{1}{x(1-lnx)}$ □ $0<x<1$ □

□ $h(x)=x(1-lnx)$ □□ $h'(x)=-lnx>0$ □□□ $h(x)$ □□□□□

□□ $0<h(x)<h$ □1□ $=1$ □

□□ $g'(x)<0$ □□□ $g(x)>g$ □1□ $=0$ □

□ $f(x)>f(1-mx)$ □ $0<x<1$ □

□ $0<x_1<1<x_2$ □□□ $f(x_2)=f(x_1)>f(1-mx_1)$

□□ $f(x)$ □□□ $(1,+\infty)$ □□□□□□

□□ $x_2>1-lnx_1$ □□□□□□□□□

2□□2021•□□□□□□□□□ $f(x)=x-lnx-a$ □□□□□□□ x_1 □ $x_2(x_1<x_2)$ □

□1□□ a □□□□□□

□2□□□□ $x_1+x_2<\frac{4a+2}{3}$ □

□□□□□□□1□ $f'(x)=\frac{x-1}{x}(x>0)$ □

□ $0<x<1$ □□ $f'(x)<0$ □ $f(x)$ □□□□□

□ $x>1$ □□ $f'(x)>0$ □ $f(x)$ □□□□□

□□□□ $f(x)=x-lnx-a$ □□□□□□□□□□□ f □1□ $=1-a<0$ □ $\therefore a>1$ □

□ $a>1$ □□□ $e^{-a}<1$ □□ $f(e^{-a})=e^{-a}>0$ □ $\therefore$ □□ $f(x)$ □ $(0,1)$ □□□□□

□ $e^{a}>1$ □ $f(e^{a})=e^{a}-2a>0$ □ $\therefore$ □□ $f(x)$ □ $(1,+\infty)$ □□□□□□

$\therefore a$ □□□□□□ $(1,+\infty)$ □

□2□□□1□□□ $0<x_1<1<x_2$ □

□ $x_1 - \ln x_1 - a = 0$ □ $\therefore a = x_1 - \ln x_1$ □

□□ $x_1 + x_2 < \frac{4a+2}{3}$ □ $x_2 < \frac{4a+2}{3} - x_1 = \frac{4(x_1 - \ln x_1)+2}{3} - x_1 = \frac{x_1 - 4\ln x_1 + 2}{3}$ □

□□□□□ $g(x) = \frac{x - 4\ln x + 2}{3}$ □ $(0<x<1)$ □

□ $g(x) = \frac{x-4}{3x} < 0$ □□□ $g(x)$ □ $(0,1)$ □□□□□ $g(x) > g$ □1□ $=1$ □

$\therefore x_2 > 1$ □ $\frac{x_1 - 4\ln x_1 + 2}{3} > 1$ □

□□□□ $h(x) = f(x) - f(\frac{x-4\ln x+2}{3})$ □ $(0<x<1)$

$h(x) = \frac{2x+1}{3x} + \frac{1}{x-4\ln x+2}\cdot\frac{x-4}{x}$ □

□□□□ $h(x) > 0$ □□□□ $\ln x - \frac{(x+5)(x-1)}{4x+2} < 0$ □

□□□□ $H(x) = \ln x - \frac{(x+5)(x-1)}{4x+2}$ □ $(0<x<1)$ □

$H(x) = \frac{(1-x)^3}{(2x+1)^2 x} > 0$ □ $(0,1)$ □□□□□

□□ $H(x)$ □ $(0,1)$ □□□□□ $H(x) < H$ □1□ $=0$ □

$\therefore h(x) > 0$ □ $h(x)$ □ $(0,1)$ □□□

$\therefore h(x) < h$ □1□ $=0$ □

$\therefore f(x_1) < f(\frac{x_1-4\ln x_1+2}{3})$

$\therefore f(x_2) < f(\frac{x_1-4\ln x_1+2}{3})$ □

□ $x>1$ □□ $f'(x)>0$ □ $f(x)$ □□□□□

$\therefore x_2 < \frac{x_1-4\ln x_1+2}{3}$ □

□ $x_1+x_2<\frac{4a+2}{3}$ □

3□□2016□•□□□□□□□□□□□□ $f(x)=(x-2)e^x+a(x-1)^2$ □ $a\in R$ □

□I□□□□ $y=f(x)$ □□ $P(1$ □ f □1□ $)$ □□□□□□□

□II□□ $a..0$ □□ $f(x)$ □□□□□□

□III□□ $f(x)$ □□□□□ x_1 □ x_2 □□□□ $x_1+x_2<2$ □

□□□□□□□I□ $f'(x)=(x-1)(e^x+2a)$ □

f □1□ $=-e$ □ f □1□ $=0$ □

□□□□□□□ $y+e=0$ □

□II□□□□ $f'(x)=(x-1)(e^x+2a)$ □

$\therefore x\in(-\infty,1)$ □ $f'(x)<0$ □ $f(x)$ □□□□□

$x\in(1,+\infty)$ □ $f'(x)>0$ □ $f(x)$ □□□□□

$\therefore f(x)_{min}=f$ □1□ $=-e<0$ □

□ $x\to-\infty$ □□ $f(x)=(x-2)e^x+a(x-1)^2$

□ $a>0$ □

$\therefore f(x)\to+\infty$ □

□ $x\to+\infty$ □□ $f(x)\to+\infty$ □

□□□ $f(x)$ □2□□□□

□III□□□II□ $\exists x_1\in(-\infty,1)$ □ $x_2\in(2,+\infty)$ □

□□ $f(x_1)=f(x_2)=0$□

$\therefore x_1<1<x_2$□

□□ $x_1+x_2<2$ □□□ $x_1<2-x_2$□

□ $x_2>1$□ $\therefore 2-x_2<1$□

□□ $x_1<1$□ $f(x)$□ $(-\infty,1)$□□□□□□

$\therefore$□□ $x_1<2-x_2$□

□□ $f(x_1)>f(2-x_2)$□

□ $f(x_1)=f(x_2)=0$□

$\therefore$□□ $f(x_2)>f(2-x_2)$□ $x_2>1$

□□II□□ $x>1$□□ $g(x)=f(x)-f(2-x)>0$

$\therefore f(x_2)-f(2-x_2)>0$□

$\therefore f(x_2)>f(2-x_2)$□□□

$\therefore x_1+x_2<2$□

4．（2021•□□□□□□□□□ $f(x)=ln|x-1|-\frac{a}{x}$□ $a\in R$□□□□

（I）□□□ $y=f(x)$□□ $(2$□ f（2）$)$□□□□□□□□□□□□ $a\in R$□□□□□□□□

（II）□□□ $a<0$□□□ x_1□ x_2□ $f(x)$□□□□□□□ $x_1+x_2>2$□

□□□□□I□□□□□□□□□□□ $f(x)=ln|x-1|-\frac{a}{x}$□

□ $x>1$□□ $f(x)=ln(x-1)-\frac{a}{x}$□□ $f'(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{a}{x^2}$□

f'□2□ $=1+\frac{a}{4}$ □ f□2□ $=-\frac{a}{2}$□

□□□□□□□ $y+\frac{a}{2}=(1+\frac{a}{4})(x-2)$ □

□□□□□ $y-x+2=\frac{a}{4}(x-4)$ □

□□ $\begin{cases} x-4=0 \\ x-y-2=0 \end{cases}$□□ $\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$□

$\therefore$ □□□□□□ $(4,2)$ □

□Ⅱ□□□□□□ $f(x)=ln|x-1|-\frac{a}{x}$□□□□□ $\{x|x\neq 0$ □ $x\neq 1\}$ □

□□ $f(x)$ □□□□□□□□□□□□□□□□□□

□ $a<0$ □□□□□ $(1,+\infty)$ □□

f□2□ $=-\frac{a}{2}>0$ □ $f(1+e^{a})=a-\frac{a}{1+e^{a}}=\frac{a\cdot e^{a}}{1+e^{a}}<0$ □$\therefore$ $f(x)$ □□□ $(1+e^{a}$ □ $2)$ □□□□ x_1 □

□□□ $(0,1)$ □□ $f(x)=ln(1-x)-\frac{a}{x}$□ $f'(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{a}{x^2}<0$ □□□ $f(x)$ □□□□□

□ $f(1-e^{a})=a-\frac{a}{1-e^{a}}=\frac{-ae^{a}}{1-e^{a}}>0$ □

□ $n>2$□□ $e^{na}<\frac{1}{2}$ □□ $f(1-e^{na})=na-\frac{a}{1-e^{na}}=a(n-\frac{1}{1-e^{na}})<0$ □

$\therefore$ $f(x)$ □□□ $(1-e^{a}$ □ $1-e^{na})$ □□□□ x_2 □

□ $f(x)$ □□□□□□ $f(x)$ □□□ $(0,1)$ □□□□□□ x_2 □

□ $1<x_1<2$ □$\therefore 0<2-x_1<1$ □

□ $f(2-x_1)=ln|1-x_1|-\frac{a}{2-x_1}=\frac{a}{x_1}-\frac{a}{2-x_1}=\frac{2a(1-x_1)}{x_1(2-x_1)}>0=f(x_2)$ □

□ $f(x)$ □□□□□□ $2-x_1<x_2$ □□ $x_1+x_2>2$ □

5□□2021•□□□□□□□□□ $f(x)=x^2-2x+\frac{ax}{e^x}-b$ □

□1□□□□ $y=f(x)$ □ $(0$ □ $f(0))$ □□□□□□□ $y=-x-1$ □□ a □ b □□□

□2□□ $b=1$ □ $a<0$ □□□□□□□ $f(x)$ □□□□□ x_1 □ x_2 □□ $x_1+x_2>2$ □

□□□□□□1□ $f(0)=-b=-1$ □□□ $b=1$ □

□ $f'(x)=2x-2+\frac{a(1-x)}{e^x}$ □

□ $f'(0)=-2+a$ □□□ $-2+a=-1$ □□ $a=1$ □

□2□□ $b=1$ □□ $f(x)=x^2-2x+\frac{ax}{e^x}-1$ □

□ $f'(x)=2x-2+\frac{a(1-x)}{e^x}=(x-1)(2-\frac{a}{e^x})$ □

□□ $a<0$ □□□ $2-\frac{a}{e^x}>0$ □□ $f'(x)=0$ □ $x=1$ □

□ $x\in(-\infty,1)$ □□ $f'(x)<0$ □□ $x\in(1,+\infty)$ □□ $f'(x)>0$ □

□□□□ $f(x)$ □ $(-\infty,1)$ □□□□□□□ $(1,+\infty)$ □□□□□□

□ f □1□ $=-2+\frac{a}{e}<0$ □ $f(-1)=2-ae>0$ □

□ $-1,, a<0$ □□ $3a..-3$ □ $2e^3+3a.2e^3-3>0$ □

□□ f □3□ $=2+\frac{3a}{e^3}=\frac{2e^3+2a}{e^3}>0$ □

□ $a<-1$ □ $-e^3a>e^3\Rightarrow ln(-e^3a)>lne^3=3>1$ □□□□ $ln(-e^3a)=t>3$ □

□ $f(t)=t^2-2t+\frac{at}{e^{ln(-e^3a)}}-1=t^2-2t+\frac{at}{-e^3a}-1=t^2-(2+\frac{1}{e^3})t-1$ □

二次函数 $g(t)=t^2-(2+\frac{1}{e^2})t-1$ 的对称轴为 $t=\dfrac{2+\frac{1}{e^2}}{2}<3$

所以 $f(t)>g$（3）$=9-6-\frac{3}{e^2}-1=2-\frac{3}{e^2}>0$，

由零点存在性定理，函数 $f(x)$ 存在两个零点 x_1，x_2，设 $x_1<1<x_2$，

由 $x_1+x_2>2$，得 $x_2>2-x_1>1>x_1$，

由函数 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，只需证 $f(x_2)>f(2-x_1)$ 即可．又 $f(x_1)=f(x_2)=0$，

所以只需证 $f(x_1)>f(2-x_1)$ 即可．

$f(x_1)=x_1^2-2x_1+\frac{ax_1}{e^{x_1}}-1$，$f(2-x_1)=(2-x_1)^2-2(2-x_1)+\frac{a(2-x_1)}{e^{2-x_1}}-1$，

只需证 $x_1^2-2x_1+\frac{ax_1}{e^{x_1}}=(2-x_1)^2-2(2-x_1)+\frac{a(2-x_1)}{e^{2-x_1}}$，

化简得 $\frac{x_1}{e^{x_1}}=\frac{2-x_1}{e^{2-x_1}}$，

$\frac{x_1}{e^{x_1}}-\frac{2-x_1}{e^{2-x_1}}=\frac{x_1e^{2-x_1}-(2-x_1)e^{x_1}}{e^{x_1}e^{2-x_1}}$

设 $h(x)=xe^{2-x}-(2-x)e^x$，则 $h'(x)=(1-x)(e^{2-x}-e^x)$．

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$；

当 $x\in(-\infty,1)$ 时，$h'(x)>0$．而 h（1）$=0$，

故当 $x<1$ 时，$h(x)<0$．

而 $e^{x_1}e^{2-x_1}>0$ 恒成立．

故 $f(x_1)>f(2-x_1)$，

即 $f(x_2)>f(2-x_1)$，则 $x_2>2-x_1$，

□ $x_1+x_2>2$ □□□□

6□□2021•□□□□□□□□ $f(x)=a\ln x+x^2-(a+2)x$ □□□ a □□□□□ $a\neq 0$ □

(I) □ $a>0$ □□□ $f(x)$ □ $(0$ □ $e]$ □□□□□ 1 □□□ a □□□

(II) □ $a<0$ □□□□ $f(x)$ □□□□□□□□□ x_1 □ x_2 □□□□ $x_1+x_2>2$ □

□□□□□□□I□□□ $f(x)=a\ln x+x^2-(a+2)x$ □□□□□ $(0,+\infty)$ □

$$f'(x)=\frac{a}{x}+2x-(a+2)=\frac{2x^2-(a+2)x+a}{x}=\frac{(2x-a)(x-1)}{x}$$

①□ $\frac{a}{2}=1$,□ $a=2$□ □□□ $f(x)$ □ $(0$ □ $e]$ □□□□□□□□□□□ f □e□ $=2+e^2-4e\neq 1$ □□□□□□□

②□ $1<\frac{a}{2}<e$ □□ $2<a<2e$ □□□□ $f(x)$ □ $(0$ □ $1]$ □ $(\frac{a}{2},e]$ □□□□□□□ $(1,\frac{a}{2})$ □□□□□

f □1□ $=-a-1\neq 1$ □ f □e□ $=a+e^2-(a+2)e=1$ □ $\Rightarrow a=\frac{e^2-2e-1}{e-1}\notin(2,2e)$ □□□□□□□

③□ $\frac{a}{2}\ldots e$ □□ $a\ldots 2e$ □□□□ $f(x)$ □ $(0$ □ $1]$ □□ $(1$ □ $e]$ □□□□□□□□□□ f □1□ $=-a-1\neq 1$ □□□□□□□

④□ $0<\frac{a}{2}<1$ □□ $0<a<2$ □□□□ $f(x)$ □ $(0$ □ $\frac{a}{2}]$ □ $(1,+\infty)$ □□□□□□□ $(\frac{a}{2}$ □ $1)$ □□□□□

$f(\frac{a}{2})=a\ln\frac{a}{2}-\frac{a^2}{4}-a<0$ □ f □e□ $=a+e^2-(a+2)e=1$ □ $\Rightarrow a=\frac{e^2-2e-1}{e-1}\in(0,2)$ □□□□□□

□□□□□□□ a □□□ $\frac{e^2-2e-1}{e-1}$ □

□II□□□□ $f'(x)=\frac{a}{x}+2x-(a+2)=\frac{2x^2-(a+2)x+a}{x}=\frac{(2x-a)(x-1)}{x}$ □

□ $f'(x)=0$ □□ $x_1=1,x_2=\frac{a}{2}$ □

□ $a<0$ □□□□ $f(x)$ □ $(0$ □ $1]$ □□□□ $(1,+\infty)$ □□□□□

函数 $f(x)$ 有两个不相等的零点 x_1，x_2（不妨设 $x_1 < x_2$），则 $x_1 \in (0,1)$，$x_2 \in (1,+\infty)$，

构造函数 $g(x)=f(x)-f(2-x)$，$x \in (0,1)$，则 g（1）$=0$，

$g(x)=a\ln x+x^2-(a+2)x-[a\ln(2-x)+(2-x)^2-(a+2)(2-x)]=a[\ln x-\ln(2-x)-2x+2]$

$g'(x)=a(\frac{1}{x}+\frac{1}{2-x}-2)=\frac{2a(x-1)^2}{x(2-x)}<0$，

$\therefore g(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递减，$g(x)>g$（1）$=0$，$\therefore f(x)>f(2-x)$，$x \in (0,1)$ 恒成立.

$\because x_1 \in (0,1)$，$\therefore f(x_1)>f(2-x_1)$ 恒成立.

即 $f(x_1)=f(x_2)>f(2-x_1)$，

$\because x_2$，$2-x_1 \in (1,+\infty)$，且函数 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增，

$\therefore x_2>2-x_1$，$\therefore x_1+x_2>2$.

7.（2021•贵州模拟）已知函数 $f(x)=\ln x-\frac{2(x-1)}{1+x}$，$g(x)=\frac{e^{x-1}}{2x-3}$.

（1）求函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 的最小值；

（2）设 $b>a>0$，证明：$\frac{b-a}{\ln b-\ln a}<\frac{a+b}{2}$；

（3）若存在实数 m，使方程 $g(x)=m$ 有两个实根 x_1，x_2，且 $x_2>x_1>\frac{3}{2}$，证明：$x_1+x_2>5$.

【解答】解：（1）由 $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{2(1+x)-(x-1)}{(1+x)^2}=\frac{(x-1)^2}{x(1+x)^2}>0$，

$\therefore f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 单调递增，

又 $\because f$（1）$=0$，

$\therefore f(x)_{min}=f$（1）$=0$，

□□□□2□□□1□□□ $f(x)=lnx-\frac{2(x-1)}{1+x}\geqslant 0$ □□ $lnx\geqslant\frac{2(x-1)}{1+x}$ □

□ $b>a>0$ □□ $\frac{b}{a}>1$ □□□ $ln\frac{b}{a}>\frac{2(\frac{b}{a}-1)}{1+\frac{b}{a}}$ □□□□ $lnb-lna>\frac{2(b-a)}{b+a}$ □

$\therefore \frac{b-a}{lnb-lna}<\frac{a+b}{2}$ □

□□□□3□□ $\frac{e^{x_1-1}}{2x_1-3}=\frac{e^{x_2-1}}{2x_2-3}=m$ □□□ $ln\frac{e^{x_1-1}}{2x_1-3}=ln\frac{e^{x_2-1}}{2x_2-3}$ □

□ $lne^{x_1-1}-ln(2x_1-3)=lne^{x_2-1}-ln(2x_2-3)$ □

□ $ln(2x_2-3)-ln(2x_1-3)=x_2-x_1=\frac{(2x_2-3)-(2x_1-3)}{2}$ □ $(**)$ □

$\therefore$ □□2□□□ $2=\frac{(2x_1-3)-(2x_2-3)}{ln(2x_1-3)-ln(2x_1-3)}<\frac{(2x_2-3)-(2x_1-3)}{2}$ □

□□□ $(**)$ □□□□□□ $\frac{2(x_1+x_2)-6}{2}>2$ □□ $x_1+x_2>5$

8□□2021•□□□□□□□□□ $f(x)=2lnx+ax^2-1(a\in R)$ □

□I□□□□ $f(x)$ □□□□□

□II□□ $a=1$ □□□□□□□□□

(i) □□□□ $f(1+x)+f(1-x)<m$ □□□□ $0<x<1$ □□□□□ m □□□□□

(ii) □ x_1 □ x_2 □□□□□□□□□□ $f(x_1)+f(x_2)=0$ □□□□ $x_1+x_2>2$ □

□□□□□□□I□ □□ $f(x)=2lnx+ax^2-1(a\in R)$ □

$\therefore f(x)$ □□□□□ $(0,+\infty)$ □ $f'(x)=\frac{2}{x}+2ax$ □

□ $f'(x)>0$ □ $x>0$ □ $\therefore 2ax^2+2>0$ □

① □ $a\geq 0$ □□ $f'(x)>0$ □ $(0,+\infty)$ □□□□

$\therefore f(x)$ □□□□□ $(0,+\infty)$ □

② □ $a<0$ □□ $2ax^2+2>0$ □

$\therefore -\sqrt{-\frac{1}{a}}<m<\sqrt{-\frac{1}{a}}$ □

□ $x>0$ □ $\therefore f(x)$ □□□□□□ $(0,\frac{\sqrt{-a}}{-a})$ □□□□□□ $(\frac{\sqrt{-a}}{-a}$ □ $+\infty)$ □

□II□ (i) □ $F(x)=f(1+x)+f(1-x)=2ln(1+x)+2ln(1-x)+2x^2$ □

$F'(x)=\frac{2}{1+x}-\frac{2}{1-x}+4x=-\frac{4x^3}{1-x^2}$ □

□ $0<x<1$ □ $\therefore F'(x)<0$ □ $0<x<1$ □□□□□

$\therefore F(x)$ □ $x\in(0,1)$ □□□□□□

$\therefore F(x)<F(0)=0$ □

$\therefore m\geq 0$ □□ m □□□□□□ $[0$ □ $+\infty)$ □

□□□ (ii) □ f □1□ $=0$ □ $f(x)$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□□

① □ x_1 □ $x_2\in(0,1)$ □□ $f(x_1)<0$ □ $f(x_2)<0$ □

□ $f(x_1)+f(x_2)<0$ □□□ $f(x_1)+f(x_2)=0$ □□□

② □ x_1 □ $x_2\in(1,+\infty)$ □□ $f(x_1)>0$ □ $f(x_2)>0$ □

□ $f(x_1)+f(x_2)>0$□□□ $f(x_1)+f(x_2)=0$□□□

③ □ $x_1=1$□□ $f(x_1)=0$□□ $f(x_1)+f(x_2)=0$□$\therefore f(x_2)=0$□

$\therefore x_2=1$□□ $x_1\ne x_2$□□□

④ □□□ $0<x_1<1<x_2$□

□□□Ⅱ□□□ $0<x<1$□□ $f(1+x)+f(1-x)<0$□

□ $1-x=x_1$□□ $f(2-x_1)+f(x_1)<0$□

$\therefore f(2-x_1)<-f(x_1)=f(x_2)$□

□ $f(x)$□$(0,+\infty)$□□□□□□

$\therefore 2-x_1<x_2$□$\therefore x_1+x_2>2$□

9□□2021•□□□□□□□□□□ $f(x)=\frac{mx-n}{x}-lnx(m,n\in R)$□

□Ⅰ□□□□ $f(x)$□$(1$□f□1□$)$□□□□□□□ $x-y=0$□□□□□□ n□□□

□Ⅱ□□ $n=1$□□□□ $f(x)$□□□□□□ x_1□$x_2(0<x_1<x_2)$□□□□ $x_1+x_2>2$□

□□□□□□□Ⅰ□□□ $f'(x)=\frac{n}{x^2}-\frac{1}{x}$□□□□□□□ $x-y=0$□□□

□□ f'□1□$=n-1=1$□

□□ $n=2$□

□Ⅱ□□□□□ $n=1$□□ $f(x)=m-\frac{1}{x}-lnx$ □

□□□□ $\begin{cases} m-\frac{1}{x_1}-lnx_1=0 ① \\ m-\frac{1}{x_2}-lnx_2=0 ② \end{cases}$ □

②−① □□ $\ln x_2-\ln x_1=\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}$ □

□ $\ln\frac{x_2}{x_1}=\frac{\frac{x_2}{x_1}-1}{x_2}$ □③

□ $t=\frac{x_2}{x_1}$ □□ $x_2=tx_1$ □□ $t>1$ □

□□□ $x_1+x_2=x_1+tx_1=(1+t)x_1$ □□③□□ $\ln t=\frac{t-1}{tx_1}$ □

□□ $x_1=\frac{t-1}{t\ln t}(t>1)$ □

□□ $x_1+x_2>2$ □

□□□ $(1+t)\frac{t-1}{t\ln t}>2$ □

□□ $\frac{t^2-1}{t}>2\ln t$ □

□ $t-\frac{1}{t}-2\ln t>0$ □

□ $h(t)=t-\frac{1}{t}-2\ln t(t>1)$ □□ $h'(t)=\frac{(t-1)^2}{t^2}>0$ □

□□ $h(t)$ □ $(1,+\infty)$ □□□□□□ h□1□ $=0$ □

□□□ $t\in(1,+\infty)$ □□ $h(t)>0$ □

□ $x_1+x_2>2$ □

10□□2021•□□□□□□□□□ $f(x)=\frac{a+\ln x}{x}(a\in R)$ □

□1□□□□ $f(x)$ □□□□□□

□2□□□□ $f(x)$ □□□ $g(x)=lnx$ □□□□□□ l □□□□□□□□□□□ a □□□□□□

□3□□□□□ $a\in(0,\frac{1}{2})$ □□□□ $h(x)=f(x)-ax$ □□□□□ x_1 □ x_2 □□□□ $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}<\frac{1}{a}$ □

□□□□□□1□□ $f(x)=\frac{a+lnx}{x}$ □□□□ $f'(x)=\frac{1-a-lnx}{x^2}$ □

□ $f'(x)=0$ □□□ $x=e^{1-a}$ □

□ $x\in(0,e^{1-a})$ □□ $f'(x)>0$ □ $f(x)$ □□□□□

□ $x\in(e^{1-a}$ □ $+\infty)$ □□ $f'(x)<0$ □ $f(x)$ □□□□□

□2□□□□□ l □□□ $g(x)=lnx$ □□□□ $(x_0$ □ $y_0)$ □□□□□ l □□□ $k=g'(x_0)=\frac{1}{x_0}$ □

□□□ l □□□□□ $y-y_0=\frac{1}{x_0}(x-x_0)$ □□□□□□ $(0,0)$ □□□□ $y_0=1$ □□□ $x_0=e$ □

□□□ l □□□□□ $y=\frac{1}{e}x$ □□□□ $f(x)=\frac{a+lnx}{x}$ □□□□□□ $a=\frac{1}{e}x^2-lnx$ □

□ $m(x)=\frac{1}{e}x^2-lnx$ □□□□□□□ $m'(x)=\frac{2x^2-e}{ex}$ □□ $m'(x)=0$ □□□ $\sqrt{\frac{e}{2}}$ □

□ $x\in(0,\sqrt{\frac{e}{2}})$ □□ $m'(x)<0$ □ $m(x)$ □□□□□□□□ $(\frac{ln2}{2},+\infty)$ □

□ $x\in(\sqrt{\frac{e}{2}},+\infty)$ □□ $m'(x)>0$ □ $m(x)$ □□□□□□□□ $(\frac{ln2}{2},+\infty)$ □

□□□□ l □□□ $f(x)$ □□□□□□□□□□□□□□□

□□□ a □□□□□□ $\{\frac{ln2}{2}\}$ □

□3□□□□ $h(x)=\frac{a+lnx-ax^2}{x}$ □□□ $h(x)$ □□□□□□□□□ $k(x)=ax^2-lnx-a$ □□□□□□□□ k □1□ $=0$ □

□ $x=1$ □□□ $k(x)$ □□□□□□

□ $k(x)$ □□□□ $k'(x)=2ax-\frac{1}{x}$ □□ $k'(x)=0$ □□□ $x=\frac{1}{\sqrt{2a}}$ □□ $x>\frac{1}{\sqrt{2a}}$ □□ $k'(x)>0$ □ $k(x)$ □□□□□

□ $0<x<\frac{1}{\sqrt{2a}}$ □□ $k'(x)<0$ □ $k(x)$ □□□□□□ $x=\frac{1}{\sqrt{2a}}$ □□ $k(x)$ □□□□□ $k(\frac{1}{\sqrt{2a}})<k(1)=0$ □

$k(x)=ax^2-lnx-a>ax^2-(x-1)-a=ax^2-x+1-a>ax^2-x+\frac{1}{2}$ □ □ □ □ $x_0>\frac{1}{\sqrt{2a}}$ □ □ □ □ □ □ □

$u(x)=ax_0^2-x_0+\frac{1}{2}>0$ □

□ $k(x_0)>u(x_0)>0$ □□□□□□□ $(\frac{1}{\sqrt{2a}},x_0)$ □□□□ $k(x)$ □□□□□□

□□□□□ $h(x)$ □□□□□□□□□ $x=1$ □□□□□□□ $(\frac{1}{\sqrt{2a}},+\infty)$ □□

□□□□ $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}<\frac{1}{a}$ □

□□□□□□ $h(x)$ □□□□□□□□□ $x=1$ □□□□□□□ $(\frac{1}{\sqrt{2a}},+\infty)$ □□

□□□ $x_1=1$ □ $x_2>\frac{1}{\sqrt{2a}}$ □ $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=1+\frac{1}{x_2}<1+\sqrt{2a}$ □□□□□ $1+\sqrt{2a}<\frac{1}{a}$ □□□

□ $v(a)=\frac{1}{a}-\sqrt{2a}-1$ □□□□□□ $v'(a)=-\frac{1}{a^2}-\frac{1}{\sqrt{2a}}<0$ □

□ v □a□□□□□□□□□□□ $v(a)=\frac{1}{a}-\sqrt{2a}-1>v(\frac{1}{2})=0$ □□ $1+\sqrt{2a}<\frac{1}{a}$ □

□□□□□

11．□2021•□□□□□□□□ $f(x)=\frac{lnx}{x^2+a}(x>0)$ □□□ $a\in R$ □

□Ⅰ□□□□ $f(x)$ □□□□□

□Ⅱ□□ $e^2[(x-1)^2(x+1)+lnx]<e^{2x}lnx$ □□ x □□□□□

□ Ⅲ □ □ $a=3e^4$ □ □ □ x_1 □ x_2 □ □ □ $g(x)=f(x)-m(m\in R)$ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □

$$\frac{4e^2}{(x_1+e^2)(x_2+e^2)}<m(x_1+x_2)<\frac{1+e}{e(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})}$$ □

□□□□□□1□ $f'(x)=\dfrac{x+\frac{a}{x}-2xlnx}{(x^2+a)^2}=\dfrac{a+x^2-2x^2lnx}{x(x^2+a)^2}$ □

□□□□□ $f'(x)$ □□□□□□

□ $a=2x^2lnx-x^2=x^2(2lnx-1)$ □

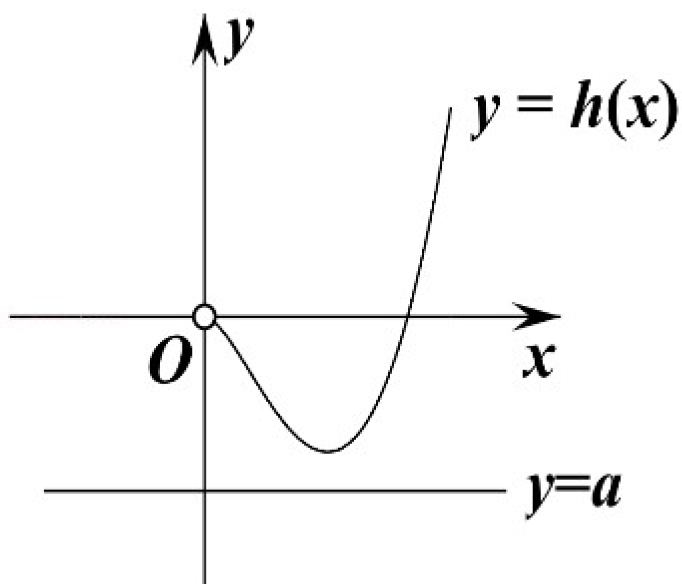
□ $h(x)=x^2(2lnx-1)$ □ $h'(x)=4xlnx$ □

□ $h'(x)>0$ □□□ $x>1$ □□ $h'(x)<0$ □□□ $0<x<1$ □

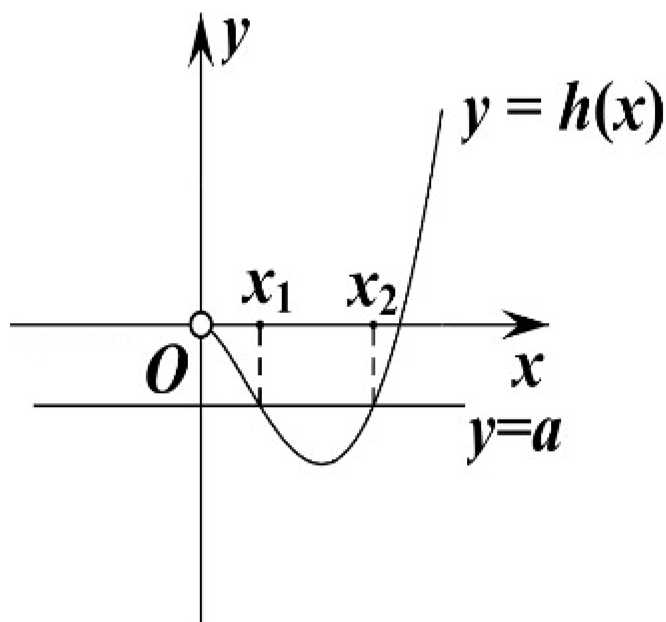
□ $h(x)$ □□□ $(0,1)$ □□□□□□□□□ $(1,+\infty)$ □□□□□□

□ $h(x)\geqslant h(1)=-1$ □□ $x\to 0_+$ □ $h(x)\to 0$ □□ $x\to+\infty$ □ $h(x)\to+\infty$ □

① □ $a\leqslant -1$ □□ $f'(x)\leqslant 0$ □□□ $(0,\sqrt{-a})\cup(\sqrt{-a},+\infty)$ □□□□□□□□□ $f(x)$ □□□ $(0,\sqrt{-a})$ □ $(\sqrt{-a},+\infty)$ □□□□□□



② □ $-1<a<0$ □□□□□ $a=2x^2\ln x-x^2=x^2(2\ln x-1)$ □□□□□□□ x_1 □ x_2 □□□□ $x_1<1<x_2$ □

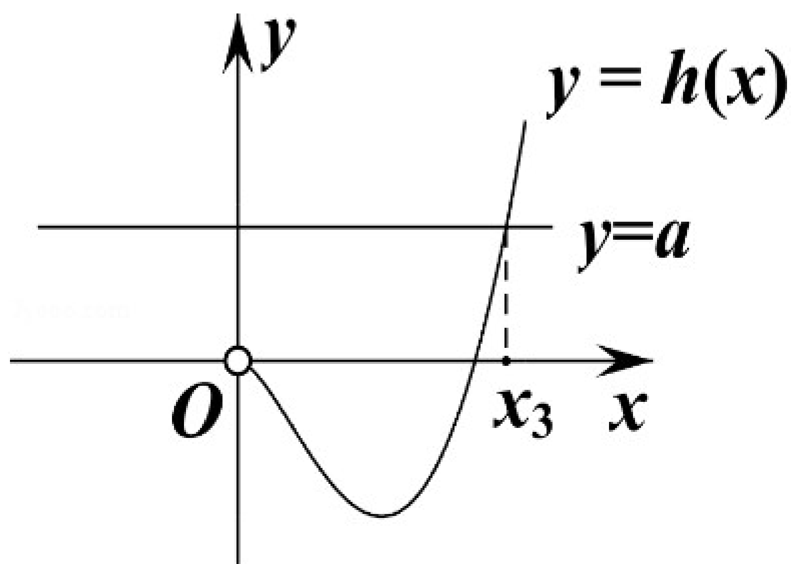


□□ $h(\sqrt{-a})<a$ □□ $x_1<\sqrt{-a}<x_2$ □

□ $0<x<x_1$ □ $x>x_2$ □□ $f'(x)<0$ □□ $x_1<x<\sqrt{-a}$ □ $\sqrt{-a}<x<x_2$ □□ $f'(x)>0$ □

□□□□ $f(x)$ □ $(0,x_1)$ □ $(x_2$ □ $+\infty)$ □□□□□□□ $(x_1$ □ $\sqrt{-a})$ □ $(\sqrt{-a}$ □ $x_2)$ □□□□□□

③ □ $a>0$ □□□□□ $a=2x^2\ln x-x^2=x^2(2\ln x-1)$ □□□□□□□ x_3 □



□$0<x<x_3$□□$f'(x)>0$□□$x>x_3$□□$f'(x)<0$□

□□□□$f(x)$□$(0,x_3)$□□□□□□□$(x_3，+\infty)$□□□□□□

□2□$e^2[(x-1)^2(x+1)+lnx]<e^{2x}lnx$□

□$(x-1)(x^2-1)<e^{2(x-1)}lnx-lnx$□

□$x=1$□□□□=□□□□)□

□$x>1$□□$x^2-1>0$□$e^{2(x-1)}-1>0$□

□$x<1$□□$x^2-1<0$□$e^{2(x-1)}-1<0$□

□□$x\neq1$□□$(x^2-1)\cdot(e^{2(x-1)}-1)>0$□

□□$\frac{x-1}{e^{2(x-1)}-1}<\frac{lnx}{x^2-1}$□

□□$a=-1$□□$f(e^{x-1})<f(x)$□

□□1□□□□$a\leq-1$□□$f(x)$□$(0,+\infty)$□□□□□□

□□$f(e^{x-1})<f(x)\Leftrightarrow e^{x-1}>x(x\in(0,+\infty))$□

□□ $y=e^{x-1}$ □ $y=x$ □ $x=1$ □□□□□ $y=e^{x-1}$ □□□□□

□ $x\in(0$□$1)\cup(1$□$+\infty)$□

(3)□ $f'(x)=\dfrac{x+\frac{a}{x}-2x\ln x}{(x^2+a)^2}=0$ □

□ $a=2x^2\ln x-x^2=x^2(2\ln x-1)$□

□ $a=3e^4$ □ $\therefore x_0=e^2$ □

□ (I)□□□ $a>0$ □□ $f(x)$ □□□□□□□ $1<x_1<e^2<x_2$ □

$$\begin{cases} g(x_1)=\dfrac{\ln x_1}{x_1^2+3e^4}-m=0 \\ g(x_2)=\dfrac{\ln x_2}{x_2^2+3e^4}-m=0 \end{cases}$$ □ $$\begin{cases} \ln x_1=m(x_1^2+3e^4) \\ \ln x_2=m(x_2^2+3e^4) \end{cases}$$

□□□□ $\varphi(x)=\ln x-\dfrac{2(x-e^2)}{x+e^2}-2,\ \mu(x)=\ln x-\dfrac{\sqrt{x}}{e}+\dfrac{e}{\sqrt{x}}-2$ □

$$\varphi'(x)=\frac{1}{x}-\frac{2(x+e^2)-2(x-e^2)}{(x+e^2)^2}=\frac{1}{x}-\frac{4e^2}{(x+e^2)^2}=\frac{(x-e^2)^2}{x(x+e^2)^2}\geqslant 0=\varphi'(e^2)$$ □

$$\therefore \begin{cases} \ln x<\dfrac{2(x-e^2)}{x+e^2}+2\ (x<e^2) \\ \ln x>\dfrac{2(x-e^2)}{x+e^2}+2\ (x>e^2) \end{cases}$$ □

□ $$\begin{cases} \ln x_1=m(x_1^2+3e^4)<\dfrac{2(x_1-e^2)}{x_1+e^2}+2 \\ \ln x_2=m(x_2^2+3e^4)>\dfrac{2(x_2-e^2)}{x_2+e^2}+2 \end{cases}$$ □

□□□□□ $m(x_2^2-x_1^2)>\dfrac{2(x_2-e^2)}{x_2+e^2}-\dfrac{2(x_1-e^2)}{x_1+e^2}=\dfrac{4e^2(x_2-x_1)}{(x_1+e^2)(x_2+e^2)}$ □

即 $\frac{4e^2}{(x_1+e^2)(x_2+e^2)}<m(x_1+x_2)$，

$u'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2e\sqrt{x}}-\frac{e}{2x\sqrt{x}}=\frac{2e\sqrt{x}-x-e^2}{2ex\sqrt{x}}=\frac{-(\sqrt{x}-e)^2}{2ex\sqrt{x}}$，$0=u(e^2)$，

∴ $\begin{cases}\ln x>\frac{\sqrt{x}}{e}-\frac{e}{\sqrt{x}}+2\ (x<e^2)\\ \ln x<\frac{\sqrt{x}}{e}-\frac{e}{\sqrt{x}}+2\ (x>e^2)\end{cases}$，

即 $\begin{cases}\ln x_1=m(x_1^2+3e^4)>\frac{\sqrt{x_1}}{e}-\frac{e}{\sqrt{x_1}}+2\\ \ln x_2=m(x_2^2+3e^4)<\frac{\sqrt{x_2}}{e}-\frac{e}{\sqrt{x_2}}+2\end{cases}$，

两式相减得: $m(x_2^2-x_1^2)<\frac{\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}}{e}+\frac{e(\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1})}{\sqrt{x_1x_2}}$，

即 $m(x_1+x_2)<(\frac{1}{e}+\frac{e}{\sqrt{x_1x_2}})\cdot\frac{1}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}$，

∴ $\frac{1}{e}+\frac{e}{\sqrt{x_1x_2}}<\frac{1}{e}+e$，即 $m(x_1+x_2)<\frac{1+e}{e(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})}$，

综上所述: $\frac{4e^2}{(x_1+e^2)(x_2+e^2)}<m(x_1+x_2)<\frac{1+e}{e(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})}$.

12.（2021•启东市校级开学）已知函数 $f(x)=ax-\frac{1}{x}-\ln x$，$g(x)=ax-e(a\in R)$.

（1）若 $a=0$，求函数 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{e},e)(e$ 为自然对数的底数）上的零点个数;

（2）若方程 $f(x)=g(x)$ 恰有一个实根，求 a 的取值集合;

（3）若方程 $f(x)=g(x)$ 有两个不同的实根 x_1，$x_2(x_1<x_2)$，求证: $2<x_1+x_2<3e^{a-1}-1$.

【解答】解:（1）当 $a=0$ 时，$f(x)=-\frac{1}{x}-\ln x$，$x\in(\frac{1}{e},e)$，

$\therefore f'(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{1-x}{x^2}$□□ $f'(x)=0$□□ $x=1$□

$\therefore$□ $x\in(\frac{1}{e},1)$□□ $f'(x)>0$□□□ $f(x)$□□□□□□ $x\in(1,e)$□□ $f'(x)<0$□□□ $f(x)$□□□□□

$\therefore$□ $x=1$□□ $f(x)_{□□□}=f$□1□$=-1<0$□

$\therefore$□□ $f(x)$□ $(\frac{1}{e},e)$□□□□0□□□□□ $f(x)$□ $(\frac{1}{e}$□ $e)$□□□□□

□2□□ $\varphi(x)=f(x)-g(x)=-\frac{1}{x}-\ln x+a$□□ $\varphi'(x)=\frac{1-x}{x^2}$□□ $\varphi'(x)=0$□□ $x=1$□

□ $x>1$□□ $\varphi'(x)<0$□ $\varphi(x)$□ $(1,+\infty)$□□□□□□□ $0<x<1$□□ $\varphi'(x)>0$□ $\varphi(x)$□ $(0,1)$□□□□□□

□ $\varphi(x)_{max}=\varphi$□1□$=a-1$□

①□ $a-1=0$□□ $a=1$□□□□□□□□□□□□□□□□□

②□ $a-1<0$□□ $a<1$□□ $\varphi(x)<0$□□□□□□□□□□

③□ $a-1>0$□□ $a>1$□□□□□□ $\exists e^{a}>1$□ $\varphi(e^{a})=-\frac{1}{e^{a}}<0$□□□□□□ $\exists e^{-a}<1$□ $\varphi(e^{-a})=2a-e^{a}<0$□□□□ (e^{-a},e^{a})□□□□

$\varphi(x)$□□□□□□□□□□

□□□□□ a□□□□□□ $\{1\}$□

□3□□□□□□ $x_1+x_2>2$□

□□□□□ $a=\frac{1}{x_1}+\ln x_1=\frac{1}{x_2}+\ln x_2$□□□ $\frac{x_2-x_1}{x_2x_1}=\ln\frac{x_2}{x_1}$□

□ $\frac{x_2}{x_1}=t$□ $t>1$□□ $\ln t=\frac{t-1}{tx_1}$□□ $x_1=\frac{t-1}{t\ln t}$□

□□ $x_1+x_2=x_1(t+1)=\frac{t^2-1}{t\ln t}$□ $x_1+x_2-2=\frac{2(\frac{t^2-1}{2t}-\ln t)}{\ln t}$□

□□□ $g(x)=\frac{x^2-1}{2x}-lnx$ □ $x>1$ □

□ $g'(x)=\frac{(x-1)^2}{2x^2}>0$ □□ $g(x)$ □ $(1,+\infty)$ □□□□□□

□□□ $t>1$ □□ $g(t)>g$ □1□ $=0$ □

□ $lnt>0$ □□□□ $x_1+x_2>2$ □

□□ $x_1+x_2<3e^{a-1}-1$ □

$f(x)=0\Leftrightarrow h(x)=ax-1-xlnx=0$ □□ x_1 □ x_2 □□ $h(x)=0$ □□□□□□

□ $h'(x)=a-1-lnx=0$ □□ $x=e^{a-1}$ □□ $p=e^{a-1})$ □

□□1□□□ p □ $h(x)$ □□□□□□□□□□ $\begin{cases}h(p)>0\\x_1<p<x_2\end{cases}$ □

□□□ $m(x)=lnx-\frac{2(x-p)}{x+p}-lnp$ □□ $m'(x)=\frac{(x-p)^2}{x(x+p)^2}\geqslant 0$ □□ $m(x)$ □□□□□

□ $x>p$ □□ $m(x)>m(p)=0$ □□ $0<x<p$ □□ $m(x)<0$ □

□□□ $ax_1-1=x_1lnx_1<\frac{2x_1(x_1-p)}{x_1+p}+x_1lnp$ □

□□□□ $(2+lnp-a)x_1^2-(2p+ap-plnp-1)x_1+p>0$ □

□ $x_1^2-(3e^{a-1}-1)x_1+e^{a-1}>0$ □

□□ $x_2^2-(3e^{a-1}-1)x_2+e^{a-1}<0$ □

□ $x_2^2-(3e^{a-1}-1)x_2+e^{a-1}<x_1^2-(3e^{a-1}-1)x_1+e^{a-1}$ □

□ $(x_2+x_1)(x_2-x_1)<(3e^{a-1}-1)(x_2-x_1)$ □

□□ $x_1 + x_2 < 3e^{a-1} - 1$ □

□□□ $2 < x_1 + x_2 < 3e^{a-1} - 1$ □

13□□2016•□□□□□□□□□ $f(x)=a-\frac{1}{x}-lnx$ □□□ a □□□□

□I□□ $f(x)=0$ □□□□□□□ a □□□

□II□ (i) □□□ $g(x)=a-\frac{1}{x}-\frac{2(x-p)}{x+p}-f(x)-lnp$ □□□ p □□□□□□□□□ $g(x)$ □□□□□

(ii) □ $f(x)$ □□□□□□ x_1 □ $x_2(x_1<x_2)$ □□□□ $x_1+x_2<3e^{a-1}-1$ □

□□□□□□□I□ $f'(x)=\frac{1-x}{x^2}$ □□ $f'(x)=0$ □□□□ $x=1$ □

□ $0<x<1$ □□ $f'(x)>0$ □ $f(x)$ □ $(0,1)$ □□□

□ $x>1$ □□ $f'(x)<0$ □ $f(x)$ □ $(1,+\infty)$ □□□

$f(x)_{max}=f$ □1□ $=a-1$ □

① □ $f(x)_{max}=0$ □□□□ $a=1$ □□□□□□□□□□□□□□□□

② □ $f(x)_{max}<0$ □□ $a<1$ □□ $f(x)<0$ □□□□□□□□□□

③ □ $f(x)_{max}>0$ □□ $a>1$ □□ $e^a>1$ □ $f(e^a)=-\frac{1}{e^a}<0$ □ $e^{-a}<1$ □

$\therefore f(e^{-a})=2a-e^a\leqslant 2a-ea<0$ □□□□ $e^x\geqslant ex$ □

$\therefore f(x)$ □2□□□□□□□□□

□□□ $a=1$ □

□II□ (i) □ $g(x)=a-\frac{1}{x}-\frac{2(x-p)}{x+p}-f(x)-lnp$ □

□□ $g(x)=\ln x-\frac{2(x-p)}{x+p}-\ln p$ □

□□ $g(x)$ □□□□□ $(0,+\infty)$ □□ $p>0$ □

□ $g'(x)=\frac{(x-p)^2}{x(x+p)^2}\geqslant 0$ □

$\therefore g(x)$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□

$(ii)\ f(x)=0\Leftrightarrow h(x)=ax-1-x\ln x=0$ □□ x_1 □ x_2 □□ $h(x)=0$ □□□□□□

□ $h'(x)=a-1-\ln x=0$ □□ $x=e^{a-1}$ □□ $p=e^{a-1})$ □

□□□ p □ $h(x)$ □□□□□□□□□□ $\begin{cases} h(p)>0 \\ x_1<p<x_2 \end{cases}$ □

□□□ $m(x)=\ln x-\frac{2(x-p)}{x+p}-\ln p$ □□ $m'(x)=\frac{(x-p)^2}{x(x+p)^2}\geqslant 0$ □□ $m(x)$ □□□□□

□ $x>p$ □□ $h(x)>h(p)=0$ □□ $0<x<p$ □□ $h(x)<0$ □

□□□ $ax_1-1=x_1\ln x_1<\frac{2x_1(x_1-p)}{x_1+p}+x_1\ln p$ □

□□□□ $(2+\ln p-a)x_1^2-(2p+ap-p\ln p-1)x_1+p>0$ □

□ $x_1^2-(3e^{a-1}-1)x_1+e^{a-1}>0$ □

□□ $x_2^2-(3e^{a-1}-1)x_2+e^{a-1}<0$ □

□ $x_2^2-(3e^{a-1}-1)x_2+e^{a-1}<x_1^2-(3e^{a-1}-1)x_1+e^{a-1}$ □

□ $(x_2+x_1)(x_2-x_1)<(3e^{a-1}-1)(x_2-x_1)$ □

□□ $x_1+x_2<3e^{a-1}-1$ □

14□□2021•□□□□□□□□ $f(x)=ln(x+m)-mx$□

□1□□ $f(x)$ □□□□□□

□2□□ $m>1$□ x_1□ x_2 □□□ $f(x)$ □□□□□□□□□ $x_1+x_2<0$□

□□□□□□1□ $f(x)=ln(x+m)-mx$□∴ $f'(x)=\frac{1}{x+m}-m$□

□ $m\leq 0$ □□∴ $f'(x)=\frac{1}{x+m}-m>0$□

□ $f(x)$ □□□□□□□□ $(-m,+\infty)$ □□□□□□

□ $m>0$ □□∴ $f'(x)=\frac{1}{x+m}-m=\frac{-m(x+m-\frac{1}{m})}{x+m}$□

□ $f'(x)=0$ □□ $x=\frac{1}{m}-m\in(-m,+\infty)$□

$x\in(-m,-m+\frac{1}{m})$ □□ $f'(x)>0$□

$x\in(-m+\frac{1}{m},+\infty)$ □□ $f'(x)<0$□

$\therefore m>0$ □□□□ $f(x)$ □□□□□□□□ $(-m,-m+\frac{1}{m})$ □□□□□□□□ $(-m+\frac{1}{m},+\infty)$□

□2□□□□□1□□ $f(x)$ □□□□□□□□ $(-m,-m+\frac{1}{m})$ □□□□□□□□ $(-m+\frac{1}{m},+\infty)$□

□□□ $-m<x_1<x_2$ □□□□□ $\begin{cases}ln(x_1+m)=mx_1\\ln(x_2+m)=mx_2\end{cases}$ □□ $\begin{cases}x_1+m=e^{mx_1}\\x_2+m=e^{mx_2}\end{cases}$□

□□□□ $g(x)=e^{mx}-x$□ $g(x)=e^{mx}-x$□ $y=m$ □□□□□□□□□□ x_1□ x_2□

□ $g'(x)=me^{mx}-1=0$ □□□ $x=-\frac{lnm}{m}$□

□ $m^2>lnm(m>1)$□∴ $\frac{-lnm}{m}\in(-m,+\infty)$□

□ $g(x)=e^{mx}-x$ □□□ $(-m,\frac{-lnm}{m})$ □□□□□□□□□ $(\frac{-lnm}{m},+\infty)$ □□□□□□

□□ $-m<x_1<\frac{-lnm}{m}<x_2$ □

□□ $x_1+x_2<0$ □□□□ $x_1+x_2<\frac{2lnm}{m}$ □

□□ $x_2<\frac{2lnm}{m}-x_1\in(-\frac{lnm}{m},+\infty)$ □

□□□ $g(x)$ □ $(\frac{-lnm}{m},+\infty)$ □□□□

□□□ $g(x_2)<g(\frac{-2lnm}{m}-x_1)$

□ $g(x_2)=g(x_1)$ □□□□□ $g(x_1)<g(\frac{-2lnm}{m}-x_1)$

□ $h(x)=g(x)-g(\frac{-2lnm}{m}-x)=e^{mx}-2x-e^{-2lnm-mx}-\frac{2lnm}{m}$ □

□ $h'(x)=me^{mx}-2-(-m)e^{-2lnm-mx}=m(e^{mx}+\frac{e^{-2lnm}}{e^{mx}})-2\geq 2m\sqrt{e^{-2lnm}}-2=2m\sqrt{m^{-2}}-2=0$ □

□ $h(x)$ □□□□ $h(-\frac{lnm}{m})=0$ □

□□ $-m<x_1<\frac{-lnm}{m}$ □ $h(x_1)<0$ □

□ $g(x_1)<g(\frac{-2lnm}{m}-x_1)$ □□□

□ $x_1+x_2<0$ □□□

15□□2015□•□□□□□□□□ $f(x)=e^{mx}+x^2-mx(m\in R)$ □

□I□□ $m=1$ □□□□□ $f(x)$ □□□□□□

□II□□ $m<0$ □□□□ $y=f(x)$ □□ $(1$ □ f □1□$)$ □□□□□□□ $x+(e+1)y=0$ □□□

(i) □ $x>0$ □□□□□ $f(x)$ □ $f(-x)$ □□□□

(ii) □□□□ x_1 □ $x_2(x_1\neq x_2)$ □□ $f(x_1)=f(x_2)$ □□□□ $x_1+x_2<0$ □

□□□□□□□I□□ $m=1$ □□ $f'(x)=e^x+2x-1=(e^x-1)+2x$ □

□ $x>0$ □□ $e^x-1>0$ □ $f'(x)>0$ □

□ $x<0$ □□ $e^x-1<0$ □ $f'(x)<0$ □

□□□ $f(x)$ □ $(0,+\infty)$ □□□□ $(-\infty,0)$ □□□

□II□ □□ $y=f(x)$ □□ $(1$ □ f □1□ $)$ □□□□□□□ $x+(e+1)y=0$ □□□

□ $f'(x)=m(e^{mx}-1)+2x$ □ $\therefore f'$ □1□ $=me^m+2-m=e+1$ □

□ $me^m-m=e-1$ □□ $h(m)=me^m-m-e-1$ □

□ $h'(m)=e^m+me^m-1$ □ $m>0$ □ $\therefore h'(m)>0$ □

h □1□ $=0$ □ $\therefore m>0$ □□□ $me^m-m=e-1$ □□□□ $m=1$ □

(i) □ $x>0$ □□

□ $g(x)=f(x)-f(-x)=e^x-e^{-x}-2x$ □

□ $g'(x)=e^x+e^{-x}-2>2-2=0$ □

$\therefore g(x)$ □ $x>0$ □□□□□ $g(x)>g(0)=0$ □

□ $x>0$ □□ $f(x)>f(-x)$ □

(ii) □□□□ x_1 □ $x_2(x_1\neq x_2)$ □□ $f(x_1)=f(x_2)$ □

□□I□□□ x_1 □ x_2 □□□□□□

□□□ $x_1<0<x_2$ □□ (i) □□ $f(x_1)-f(x_2)>f(-x_2)$ □

□□□I□□□ $m=1$ □□□□ $f(x)$ □ $(-\infty,0)$ □□□

$\therefore x_1 < -x_2$□□$x_1 + x_2 < 0$□

16□□2021•□□□I□□□□□$f(x) = x(1 - lnx)$□

□1□□□$f(x)$□□□□□

□2□□a□b□□□□□□□□□□□□$blna - alnb = a - b$□□□□$2 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < e$□

□□□□1□□□□□□□□□□□□□$f'(x) = 1 - lnx - 1 = -lnx$□

$\therefore x \in (0,1)$□$f'(x) > 0$□$f(x)$□□□□□

$x \in (1, +\infty)$□$f'(x) < 0$□$f(x)$□□□□□

□$f(x)$□$(0,1)$□□□□□□$(1, +\infty)$□□□□□

□2□□□□□$blna - alnb = a - b$□□$-\frac{1}{a}ln\frac{1}{a} + \frac{1}{b}ln\frac{1}{b} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a}$□

□$\frac{1}{a}(1 - ln\frac{1}{a}) = \frac{1}{b}(1 - ln\frac{1}{b})$□

□□1□$f(x)$□$(0,1)$□□□□□□$(1, +\infty)$□□□□□

□□$f(x)_{max} = f$□1□$= 1$□□f□e□$= 0$□

□$x_1 = \frac{1}{a}$□$x_2 = \frac{1}{b}$□

□x_1□x_2□$f(x) = k$□□□□□□$k \in (0,1)$□

□□□$x_1 \in (0,1)$□$x_2 \in (1, e)$□□$2 - x_1 > 1$□

□□$2 < x_1 + x_2$□□□$x_2 > 2 - x_1$□□□$f(x_2) = f(x_1) < f(2 - x_1)$□

□$h(x) = f(x) - f(2 - x)$□

□$h'(x) = f'(x) + f'(2 - x) = -lnx - ln(2 - x) = -ln[x(2 - x)]$□$(0,1)$□□□□□

□□$h(x)>h$□1□$=0$□

□□□$h(x)$□$(0,1)$□□□□□

$\therefore h(x_1)<h$□1□$=0$□$\therefore f(x_1)<f(2-x_1)$□$\therefore 2<x_1+x_2$□□□□

□□□□□$x_1+x_2<e$□

□□□□□□$1<x_2<e-x_1$□

□□□1□□$f(x)$□□□□

□□$f(x_2)=f(x_1)>f(e-x_1)$□

□$\varphi(x)=f(x)-f(e-x)$□$x\in(0,1)$□

□$\varphi'(x)=-\ln[x(e-x)]$□□$\varphi'(x_0)=0$□

$x\in(0,x_0)$□$\varphi'(x)>0$□$\varphi(x)$□□□□□

$x\in(x_0$□$1)$□$\varphi'(x)<0$□$\varphi(x)$□□□□□

□$0<x<e$□□$f(x)>0$□□f□e□$=0$□

□$\lim_{x\to0^+}\varphi(x)=0$□

φ□1□$=f$□1□$-f(e-1)>0$□

$\therefore\varphi(x)>0$□□□□

$x_1+x_2<e$□□□

□□□□$f(x_1)=f(x_2)$□$x_1(1-\ln x_1)=x_2(1-\ln x_2)$□

□$x_1\in(0,1)$□□$1-\ln x_1>1$□$x_1(1-\ln x_1)>x_1$□

□ $x_1+x_2<x_1(1-\ln x_1)+x_2=x_2(1-\ln x_2)+x_2$□$x_2\in(1,e)$□

□ $g(x)=x(1-\ln x)+x$□$g'(x)=1-\ln x$□$x\in(1,e)$□

□$(1,e)$□□$g'(x)>0$□$g(x)$□□□□□

□□$g(x)<g$□e□$=e$□

□$x_2(1-\ln x_2)+x_2<e$□□□$x_1+x_2<e$□□□□

□ $2<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<e$ □

17□□1□□□$b>a>0$□□□□□□□$\sqrt{ab}<\frac{b-a}{\ln b-\ln a}<\frac{a+b}{2}$□

□2□□□□□$f(x)=xe^{-x}$□□$f(x_1)=f(x_2)(x_1\neq x_2)$□□□□$x_1+x_2>2$□

□□□□□□□1□□□$\sqrt{ab}<\frac{b-a}{\ln b-\ln a}(b>a>0)$□□□$\ln\frac{b}{a}<\sqrt{\frac{b}{a}}-\sqrt{\frac{a}{b}}$□

□$t=\sqrt{\frac{b}{a}}(t>1)$□□$f(t)=2\ln t-t+\frac{1}{t}(t>1)$□□$f'(t)=\frac{2}{t}-1-\frac{1}{t^2}=-\frac{(t+1)^2}{t^2}<0$□

$\therefore f(t)$□$(1,+\infty)$□□□□□□

□f□1□$=0$□

$\therefore$□$t>1$□□$f(t)=2\ln t-t+\frac{1}{t}<0$□□□□□$\ln\frac{b}{a}<\sqrt{\frac{b}{a}}-\sqrt{\frac{a}{b}}$□□□

□□$\frac{b-a}{\ln b-\ln a}<\frac{a+b}{2}(b>a>0)$□□□$\ln\frac{b}{a}>\frac{2(\frac{b}{a}-1)}{\frac{b}{a}+1}$□

□$u=\frac{b}{a}(u>1)$□□$g(u)=\ln u-\frac{2(u-1)}{u+1}(u>1)$□□$g'(u)=\frac{1}{u}-\frac{4}{(u+1)^2}=\frac{(u-1)^2}{u(u+1)^2}>0$□

$\therefore g(\mu)$□$(1,+\infty)$□□□□□

□g□1□$=0$□

$\therefore$□$\mu>1$□□$g(\mu)=ln\mu-\dfrac{2(\mu-1)}{\mu+1}>0$□□□□□$ln\dfrac{b}{a}>\dfrac{2(\dfrac{b}{a}-1)}{\dfrac{b}{a}+1}$□□□

□□□□□□□□□

□2□$f'(x)=e^x-xe^x=e^x(1-x)$□□□□□$f(x)$□$(-\infty,1)$□□□□□□$(1,+\infty)$□□□□□□$x\to+\infty$□□$f(x)\to0$□

□□□□□□□$0<x_1<1<x_2$□

□$g(x)=f(x)-f(2-x)$□$x>1$□□$g'(x)=f'(x)+f'(2-x)=e^x(1-x)+e^{x-2}(x-1)=(x-1)(e^{x-2}-e^x)>0$□

$\therefore$□□$g(x)$□$(1,+\infty)$□□□□□□

$\therefore g(x)>g$□1□$=0$□□$f(x)-f(2-x)>0$□$(1,+\infty)$□□□□□

□$x_2>1$□

$\therefore f(x_2)>f(2-x_2)$□

□$f(x_1)=f(x_2)$□

$\therefore f(x_1)>f(2-x_2)$□

□$0<x_1<1<x_2$□

$\therefore 2-x_2<1$□

□□□$f(x)$□$(-\infty,1)$□□□□□

$\therefore x_1>2-x_2$□

$\therefore x_1+x_2>2$□□□□□

18□□2021•□□□□□□□□□ $f(x)=\frac{1-a+\ln x}{x}$ □ $a\in R$

□Ⅰ□□ $f(x)$ □□□□

□Ⅱ□□ $\ln x-kx<0$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□□ k □□□□□□

□Ⅲ□□□ $x_1>0$ □ $x_2>0$ □□ $x_1+x_2<e$ □□□□ $x_1+x_2>x_1x_2$ □

□□□□□□Ⅰ□ $f'(x)=\frac{a-\ln x}{x^2}$ □□ $f'(x)=0$ □ $x=e^a$

□ $x\in(0,e^a)$ □ $f'(x)>0$ □ $f(x)$ □□□□□

□ $x\in(e^a$ □ $+\infty)$ □ $f'(x)<0$ □ $f(x)$ □□□□□

□□ $f(x)$ □□□□□ $f(e^a)=e^{-a}$

□Ⅱ□□□ $\ln x-kx<0$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□□□ $\frac{\ln x}{x}<k$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□

□ $g(x)=\frac{\ln x}{x}(x>0)$ □□□Ⅰ□□□ $g(x)$ □ $x=e$ □□□□□ $\frac{1}{e}$ □ $\therefore k>\frac{1}{e}$

□Ⅲ□ $e>x_1+x_2>x_1>0$ □□□□□ $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ □ $(0,e)$ □□□□□□

$\therefore \frac{\ln(x_1+x_2)}{x_1+x_2}>\frac{\ln x_1}{x_1}$ □ $\frac{x_1\ln(x_1+x_2)}{x_1+x_2}>\ln x_1$ ①□

□□ $\frac{x_2\ln(x_1+x_2)}{x_1+x_2}>\ln x_2$ ②

□□□□□ $\ln(x_1+x_2)>\ln x_1+\ln x_2=\ln x_1x_2$

$\therefore x_1+x_2>x_1x_2$

19□□2021•□□□□□□□□□□□□□ $f(x)=\frac{(x-a)^2}{\ln x}$ □□□ a □□□□□

□1□□ $a=1$ □□□□□□□□ 1 □□□ x □□□ $f(x)..k$ □□□□□□ k □□□□□□

□2□□ $0<a<1$ □□□□ $f(x)$ □3□□□□ x_1 □ x_2 □ x_3 □□ $x_1<x_2<x_3$ □□□□ $x_1+x_3>\frac{2}{\sqrt{e}}$ □

□□□□□1□ $x>1$ □□ $f(x)\geq k$ □□ $(x-1)^2-k\ln x\geq 0$ □□□

□ $g(x)=(x-1)^2-k\ln x$ □□ $g'(x)=\frac{2x^2-2x-k}{x}$ □

□ $x>1$ □ $\therefore 2x^2-2x=2x(x-1)>0$

① $k\leq 0$ □ $g'(x)>0$ □ $\therefore g(x)$ □ $(1,+\infty)$ □□□□□□

$\therefore x>1$ □□ $g(x)>g$ □1□ $=0$ □□□□□□

② $k>0$ □□□ $g'(x)=0$ □□□ $x_1=\frac{1-\sqrt{1+2k}}{2}<0$ □ $x_2=\frac{1+\sqrt{1+2k}}{2}>1$ □

$\therefore x\in(1,x_2)$ □ $g'(x)<0$ □ $g(x)$ □ $(1,x_2)$ □□□□□□

$\therefore x\in(1,x_2)$ □ $g(x)<g$ □1□ $=0$ □□□□□□□□□

□□□□□ $k\leq 0$ □

□2□□□□ $f'(x)=\frac{(x-a)(2\ln x+\frac{a}{x}-1)}{\ln^2 x}$ □

□□□□ $h(x)=2\ln x+\frac{a}{x}-1$ □□ $h'(x)=\frac{2x-a}{x^2}$ □

$\therefore$ □□ $h(x)$ □ $(0,\frac{a}{2})$ □□□□□□□ $(\frac{a}{2}$ □ $+\infty)$ □□□□□

□ □□ $f(x)$ □3□□□□ $x_1<x_2<x_3$ □

□□ $h_{min}(x)=h(\frac{a}{2})=2\ln\frac{a}{2}+1<0$ □□□ $a<\frac{2}{\sqrt{e}}$ □

□ $0<a<1$ □□ h □a□ $=2\ln a<0$ □ h □1□ $=a-1<0$ □

$\therefore$□□ $f(x)$ □□□□□ $(x_1$□$a)$□$(x_3$□$+\infty)$ □□□□□ $(0, x_1)$□$(a, 1)$□$(1, x_3)$□

□□□□ $f(x)$ □3□□□□□ $x_2 = a$□

$\therefore$□ $0 < a < 1$ □□ x_1□x_3□□□ $h(x) = 2\ln x + \frac{a}{x} - 1$ □□□□□

□□ $\begin{cases} 2\ln x_1 + \frac{a}{x_1} - 1 = 0 \\ 2\ln x_3 + \frac{a}{x_3} - 1 = 0 \end{cases}$ □□□ a□ $2x_1\ln x_1 - x_1 = 2x_3\ln x_3 - x_3$

□ $g(x) = 2x\ln x - x$□ $g'(x) = 2\ln x + 1$ □□□ $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$□□ $x_1 < \frac{1}{\sqrt{e}} < x3$

$\therefore$□□ $g(x) = 2x\ln x - x$□ $(0, \frac{1}{\sqrt{e}})$ □□□□□ $(\frac{1}{\sqrt{e}}$□$+\infty)$ □□□

□□ $x_1 + x_3 > \sqrt{\frac{2}{e}} \Leftrightarrow x_3 > \sqrt{\frac{2}{e}} - x_1 \Leftrightarrow g(x_3) > g(\sqrt{\frac{2}{e}} - x_1)$

▯ $g(x_1) = g(x_3)$□$\therefore$□□ $g(x_1) > g(\sqrt{\frac{2}{e}} - x_1)$

□□□□ $F(x) = g(x) > g(\sqrt{\frac{2}{e}} - x)$ □□ $F(\frac{1}{\sqrt{e}}) = 0$

□□□□ $x \in (0$□$\frac{1}{\sqrt{e}}]$ □□□□□□□

□ $F(x) = 2\ln x + 2\ln(\frac{2}{\sqrt{e}} - x) + 2$□ $F'(x) > 0$□

$\therefore F(x)$□$(0$□$\frac{1}{\sqrt{e}}]$ □□□□□ $\therefore F(x) < F(\frac{1}{\sqrt{e}}) = 0$

$\therefore$□ $0 < a < 1$ □□ $x1 + x3 > \frac{2}{\sqrt{e}}$□

20□□2021•□□□□□□□□ $f(x)=-\frac{a}{2}e^{2x}+(x-1)e^{x}(a\in R)$□

□1□□ $a=\frac{1}{e}$□□□ $g(x)=f'(x)\cdot e^{1-x}$ □□□□□ $(f'(x)$ □ $f(x)$ □□□□□

□2□□ $f(x)$ □□□□□□ x_1 □ $x_2(x_1<x_2)$ □□□□ $x_1+2x_2>3$□

□□□□□□1□□ $a=\frac{1}{e}$□□ $f(x)=-\frac{1}{2e}e^{2x}+(x-1)e^{x}$□

□ $f'(x)=e^{x-1}(-e^{x}+ex)$□

□ $g(x)=-e^{x}+ex$□$\therefore g'(x)=-e^{x}+e$□

□□ $g'(x)$□□□□ g'□1□$=0$□

□□ $x\leqslant 1$□□ $g'(x)\geqslant 0$□ $x>1$□□ $g'(x)<0$□

□ $g(x)$□$(-\infty,1)$□□□□$(1,+\infty)$□□□

□2□□□□ $f(x)=-\frac{a}{2}e^{2x}+(x-1)e^{x}$□

$\therefore f'(x)=-ae^{2x}+xe^{x}=e^{x}(-ae^{x}+x)$□

□□□□ $f'(x)=0$□2□□□□□□□□□

□ $ae^{x}=x$□2□□□□□□□ x_1□x_2□

□ $a=\frac{x}{e^{x}}$□□ $m(x)=\frac{x}{e^{x}}$□□ $m'(x)=\frac{1-x}{e^{x}}$□

□ $m'(x)>0$□□□□ $x<1$□□ $m'(x)<0$□□□□ $x>1$□

□ $m(x)$□$(-\infty,1)$□□□□$(1,+\infty)$□□□

□ $m(x)\leqslant m$□1□$=\frac{1}{e}$□□ $x\to\infty$□□ $m(x)\to 0$□

□ a□□□□□□$(0$□$\frac{1}{e}]$□

□ $\begin{cases} ae^{x_1}=x_1 \\ ae^{x_2}=x_2 \end{cases}$ □□ $a=\frac{x_1-x_2}{e^{x_1}-e^{x_2}}$ □

□ $x_1+2x_2>3 \Leftrightarrow 3<ae^{x_1}+2ae^{x_2}$

$=\frac{x_1-x_2}{e^{x_1}-e^{x_2}}(e^{x_1}+2e^{x_2})=\frac{x_1-x_2}{e^{x_1-x_2}-1}(e^{x_1-x_2}+2)$ □

□ $t=x_1-x_2$ □□ $t<0$ □

$3<x_1+2x_2 \Leftrightarrow 3<\frac{t}{e^t-1}(e^t+2)$ □ $t<0$ □

□□□□□□ $(3-t)e^t-2t-3>0$ □ $t<0$ □□□□

□ $h(t)=(3-t)e^t-2t-3(t<0)$ □

□ $h(t)=(2-t)e^t-2(t<0)$ □ $h'(t)=(1-t)e^t>0$ □

□ $h(t)$ □ $t<0$ □□□□□□□ $h(t)<h(0)=0$ □

□ $h(t)$ □ $t<0$ □□□□□□□ $h(t)>h(0)=0$ □

□□□□□□□□□

21□□2014•□□□□□□□□□ $f(x)=\frac{e^x-ax^2}{1+x}$ □

□1□□ $a=0$ □□□ $f(x)$ □□□□□

□2□□ $f(x)$ □□□□□□ x_1 □ x_2 □ x_3 □

① □ a □□□□□□

② □□□ $x_1+x_2+x_3>-2$ □

□□□□□□□1□□ $a=0$ □□ $f(x)=\frac{e^x}{1+x}$ □ $x\neq-1$ □

$\therefore f'(x)=\dfrac{xe^x}{(1+x)^2}$ □

□ $f'(x)<0$ □□ x □ $(-\infty,-1)$ □ $(-1,0)$ □□ $f(x)$ □□□□□

□ $f'(x)>0$ □□ x □ $(0,+\infty)$ □□ $f(x)$ □□□□□

□2□① □ $f(x)=\dfrac{e^x-ax^2}{1+x}$ □

$\therefore f'(x)=\dfrac{x[e^x-a(x+2)]}{(1+x)^2}$

□□ $f'(0)=0$ □□ $g(x)=e^x-a(x+2)$ □□ $g(x)=0$ □□□□□□□□ 0 □□□□ -1 □□□

□□□□□ $g'(x)=e^x-a$ □

□□□ $g'(x)=e^x-a=0$ □□□□□ $x_0=lna$ □□□ x_0 □ $g(x)$ □□□□□□

□□ $g(x)=0$ □□□□□□ $g(x_0)<0$ □□□□□□□ $x\to+\infty$ □ $x\to-\infty$ □□ $g(x)=e^x-a(x+2)\to+\infty)$

□ $g(x_0)=e^{lna}-a(lna+2)=-a(lna+1)<0$ □□ $a>\dfrac{1}{e}$ □

□□ $g(0)\neq0$ □□ $a\neq\dfrac{1}{2}$ □

□□□□□ $a>\dfrac{1}{e}$□ $a\neq\dfrac{1}{2}$ □□□ $g(-1)=\dfrac{1}{e}-a<0$ □ $g(x)=0$ □□□□□□□□□ -1 □□□□□□ -1 □

□□□□□□□□□□ $x=0$ □ $f'(x)=0$ □□□□□□□□□□□□□□□□□□□□ $f'(x)$ □□□□□□□□□□ $f(x)$ □□□□□□□□

□□□ a □□□□□□ $(\dfrac{1}{e},\dfrac{1}{2})\cup(\dfrac{1}{2},+\infty)$ □

② □□□①□□ $f(x)$ □□□□□□ x_1 □ x_2 □ x_3 □□□□□ $g(x)=0$ □□□□□□□□ x_1 □ x_2 □□□ $x_1<-1<x_2)$ □□□□□ $x_3=0$ □

□□□ $x_1+x_2+x_3>-2$ □

□□□□ $x_1+x_2>-2$ □

□□□□□$x_1 > -x_2 - 2$□

□□$g(x)$□$(-\infty, lna)$□□□□□□□□$lna > -1$□

□□□□$g(x_1) < g(-2 - x_2)$□□□$g(x_1) = g(x_2) = 0$□

□□□$g(x_2) < g(-2 - x_2)$□

□$e^{x_2} - a(x_2 + 2) < e^{-2-x_2} - a[(-2 - x_2 + 2]$

□□□$e^{x_2} - e^{-2-x_2} - 2a(x_2 + 1) < 0$□

□$g(x_2) = e^{x_2} - a(x_2 + 2) = 0$□□$a = \frac{e_{x_2}}{x_2 + 2}$□□□□□□□□□□□□□□□$e^{x_2} - e^{-2-x_2} - \frac{2e^{x_2}}{x_2 + 2}(x_2 + 1) < 0$□

□□□$x_2 e^{x_2} + (x_2 + 2)e^{-x_2-2} > 0$□

□$h(x) = xe^x + (x + 2)e^{-x-2}$□

□$x > -1$□□$h'(x) = (x + 1)e^x - (x + 1)e^{-x-2} = (x + 1)(e^x - e^{-x-2}) > 0$□$h(x)$□□□□□□$h(-1) = 0$□

□□□$x > -1$□□$h(x) > 0$□

□□□$x_2 e^{x_2} + (x_2 + 2)e^{-x_2-2} > 0$□

□□$x_1 + x_2 + x_3 > -2$□

22．（2021•□□□□□□□□□$f(x) = \frac{e^x}{x} - ax + alnx$□□□$a > 0$）

（1）□□□$f(x)$□$(1, +\infty)$□□□□□□□□□a□□□□□□

（2）□□□$g(x) = f(x) + a(lnx + \frac{1}{x})$□□□□□□$x_1$□$x_2$□$x_3$□□□□$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} > 2$□

【解答】解：（1）由函数 $f(x)=\frac{e^x}{x}-ax+a\ln x$，其中 $a>0$，

得 $f'(x)=\frac{(x-1)e^x}{x^2}+\frac{a(1-x)}{x}=\frac{(x-1)(e^x-ax)}{x^2}$，

由函数 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

故 $f'(x)=\frac{(x-1)(e^x-ax)}{x^2}\geqslant 0$，

即 $e^x-ax\geqslant 0$ 恒成立，即 $a\leqslant\frac{e^x}{x}(x>1)$ 恒成立．

令 $g(x)=\frac{e^x}{x}$，则 $g'(x)=\frac{(x-1)e^x}{x^2}>0$，

因此 $g(x)=\frac{e^x}{x}$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $0<a\leqslant e$．

（2）由 $g(x)=\frac{e^x}{x}-ax+2a\ln x+\frac{a}{x}$，则 $g'(x)=\frac{(x-1)e^x}{x^2}-a(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2})=\frac{(x-1)[e^x-a(x-1)]}{x^2}$．

由题意则 $g'(x)=0$ 有三个根，则 $e^x-a(x-1)=0$ 有两个零点 x_1、x_2，且 x_1、$x_2\in(1,+\infty)$，

由 $x-1=0$ 有一个零点，则 $x_3=1$，

令 $p(x)=e^x-a(x-1)$，则 $p'(x)=e^x-a$，

∴□ $x=lna$ □ $p(x)$ □□□□ $x\in(lna,+\infty)$ □ $p(x)$ □□□□□

∴ $p(lna)=a-a(lna-1)<0$ □□ $a>e^2$ □ $e^x-a(x-1)=0$ □□□□ x_1 □ x_2 □□ $1<x_1<lna<x_2$ □

□□□ $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}>2$ □

□□ $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3>2x_1x_2x_3$ □□□ $x_3=1)$ □□□□ $x_1+x_2>x_1x_2$ □□ $(x_1-1)(x_2-1)<1$ □

□ $e^{x_1}=a(x_1-1)$ □ $e^{x_2}=a(x_2-1)$ □□ $e^{x_1+x_2}=a^2(x_1-1)(x_2-1)$ □

□□□ $e^{x_1+x_2}=a^2(x_1-1)(x_2-1)<a^2$ □

□□□ $x_1+x_2<2lna$ □□□□ $x_2<2lna-x_1$ □

□ $p(x)$ □ $(lna,+\infty)$ □□□□□□□□□ $p(x_2)<p(2lna-x_1)$ □

□ $p(x_1)=p(x_2)$ □□□ $p(x_1)-p(2lna-x_1)<0$ □

□ $G(x)=p(x)-p(2lna-x)$ □ $1<x<lna$ □

∴ $G(x)=e^x-a(x-1)-e^{2lna-x}+a(2lna-x-1)=e^x--2ax+2alna$ □

∴ $G(x)=e^x+2a..0$ □□□□

□ $G(x)$ □□□□□

∴□ $1<x<lna$ □□ $G(x)<G(lna)=0$ □

$\therefore x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3>2x_1x_2x_3$□$\therefore$□□□□□□

23□□2021□•□□□□□□□□□□□□□ $f(x)=\frac{e^x}{x}-ax+alnx$ □□□ $a>0$□

□1□□□□ $f(x)$ □□ $x=1$ □□□□□□□□□ a □□□□□□

□2□□□□ $g(x)=f(x)+a(lnx+\frac{1}{x})$ □□□□□□ x_1□x_2□x_3□□□□ $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3>2x_1x_2x_3$□

□□□□□□1□□□□ $f(x)=\frac{e^x}{x}-ax+alnx$ □□□ $a>0$□

□ $f'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}+a(\frac{1-x}{x})=\frac{(x-1)(e^x-ax)}{x^2}$ □

□ $f(x)$ □□ $x=1$ □□□□□□□ $e^x-ax\neq 0$ □□ $a\neq\frac{e^x}{x}$ □

□ $h(x)=\frac{e^x}{x}(x\in(0,+\infty))$ □□ $h'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x}$ □

□ $x\in(0,1)$ □□ $h'(x)<0$ □□□ $h(x)$ □□□□□

$x\in(1,+\infty)$ □□ $h'(x)>0$ □□□ $h(x)$ □□□□□

□□ $h(x)_{min}=h$□1□$=e$□

$\therefore$□ $0<a<e$ □□ $e^x-ax>0$ □□□ $f'(x)=\frac{(x-1)(e^x-ax)}{x^2}=0$ □□□□□ $x=1$□

□ $f(x)$ □□□ $x=1$ □□□□□

□ $a=e$ □□ $e^x-ex=0$ □ $x-1=0$ □□□□□□□□□□□ $x\in(0,1)$ □ $(x-1)(e^x-ex)<0$□

$x\in(1,+\infty)$ □ $(x-1)(e^x-ex)>0$ □

$\therefore f'(x)=\frac{(x-1)(e^x-ax)}{x^2}=0$ □□□□□ $x=1$ □□ $f(x)$ □□□ $x=1$ □□□□□□□ $a=e$ □

□ $a>e$ □□□□□□□□□□□□

$\therefore 0<a\leqslant e$ □

□2□□ $g(x)=\frac{e^x}{x}-ax+a\ln x+a(\ln x+\frac{1}{x})$ □□ $g'(x)=\frac{(x-1)(e^x-ax+a)}{x^2}$ □

□□□□ $g'(x)=0$ □□□□□□ $e^x-a(x-1)=0$ □□□□□ x_1 □ x_2 □□ x_1 □ $x_2\in(1,+\infty)$ □

□ $x-1=0$ □□□□□□□ $x_3=1$ □

□ $p(x)=e^x-a(x-1)$ □□ $p'(x)=e^x-a$ □

$\therefore$ □ $x=\ln a$ □ $p(x)$ □□□□ $x\in(\ln a,+\infty)$ □ $p(x)$ □□□□□

$\therefore p(\ln a)a-a(\ln a-1)<0$ □□ $a>e^2$ □ $e^x-a(x-1)=0$ □□□□ x_1 □ x_2 □□ $1<x_1<\ln a<x_2$ □

□□□ $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3>2x_1x_2x_3$ □□□□ $x_1+x_2>x_1x_2$ □□ $(x_1-1)(x_2-1)<1$ □

□ $e^{x_1}=a(x_1-1)$ □ $e^{x_2}=a(x_2-1)$ □□ $e^{x_1+x_2}=a^2(x_1-1)(x_2-1)$ □

□□□ $e^{x_1+x_2}=a^2(x_1-1)(x_2-1)<a^2$ □

□□□ $x_1+x_2<2\ln a$ □□□□ $x_2<2\ln a-x_1$ □

□ $p(x)$ □ $(\ln a,+\infty)$ □□□□□□□□□ $p(x_2)<p(2\ln a-x_1)$ □

□ $p(x_1)=p(x_2)$ □□□ $p(x_1)-p(2\ln a-x_1)<0$ □

□ $G(x)=p(x)-p(2\ln a-x)$ □ $1<x<\ln a$ □

$\therefore G(x)=e^{x}-a(x-1)-e^{2lna-x}+a(2lna-x-1)=e^{x}-\dfrac{a^{2}}{e^{x}}-2ax+2alna$.

$\therefore G'(x)=e^{x}+\dfrac{a^{2}}{e^{x}}-2a\geqslant 0$ 恒成立，

则 $G(x)$ 为增函数，

$\therefore$ 当 $1<x<lna$ 时，$G(x)<G(lna)=0$，

$\therefore$ 得出 $x_{1}x_{2}+x_{1}x_{3}+x_{2}x_{3}>2x_{1}x_{2}x_{3}$.

24.（2021•赤峰期末）已知函数 $f(x)=\dfrac{e^{x-2}}{x-1}-ax+aln(x-1)$，$a$ 为常数，当 $x\in(1,3)$ 时，$f(x)$ 有三个极值点 x_{1}，x_{2}，x_{3}（其中 $x_{1}<x_{2}<x_{3}$）.

(1) 求实数 a 的取值范围；

(2) 求证：$x_{1}x_{3}<x_{1}+x_{3}$.

【解答】解：(1) 函数 $f(x)$ 函数的定义域为 $(1,+\infty)$，

由 $f(x)=\dfrac{e^{x-2}}{x-1}-ax+aln(x-1)$，得 $f'(x)=\dfrac{(e^{x-2}-ax+a)(x-2)}{(x-1)^{2}}$，

令 $f'(x)=0$，得 $x=2$ 是一个根，要使 $f(x)$ 在 $(1,3)$ 上有三个极值点 x_{1}，x_{2}，x_{3}，

则 $f'(x)=0$ 有三个解，所以 $e^{x-2}-ax+a=0$ 在 $(1,3)$ 必有 2 个解 x_{1}，x_{3}.

即 $a=\dfrac{e^{x-2}}{x-1}$，

令 $g(x)=\dfrac{e^{x-2}}{x-1}$，则 $g'(x)=\dfrac{e^{x-2}(x-2)}{(x-1)^{2}}$，

□ $\begin{cases} g'(x)>0 \\ 1<x<3 \end{cases}$ □□ $2<x<3$ □

□ $g'(x)<0$ □ $1<x<3$ □□ $1<x<2$ □

$\therefore g(x)$ □ $(1,2)$ □□□□□ $(2,3)$ □□□□□

$\therefore g(x)_{min}=g$ □2□ $=1$ □□ $x\to 1$ □□ $g(x)\to +\infty$ □ $g(3)=\frac{e}{2}$ □

□□□□□□□□□ $1<a<\frac{e}{2}$ □

$\therefore a$ □□□□□□ $1<a<\frac{e}{2}$ □

□□□□ $\therefore g(x)$ □ $(1,2)$ □□□□□ $(2,3)$ □□□□□

g □2□ $=1$ □ $g(3)=\frac{e}{2}$ □ $g(1+\frac{2}{e^2})=\frac{e^{\frac{2}{e^2}-1}}{\frac{2}{e^2}}=\frac{e}{2}e^{\frac{2}{e^2}}>\frac{e}{2}$ □

□ $1<a<\frac{e}{2}$ □□ $y=a$ □ $g(x)=\frac{e^{x-2}}{x-1}$ □ $(1,2)$ □ $(2,3)$ □□□□□□□□□□□□□□□□□

□ $a=1$ □□□□□□□□□□□

□ $a<1$ □□□□□□□□

□ $a>\frac{e}{2}$ □□□□ $(1,2)$ □□□□□□□□

□□□ a □□□□□□ $1<a<\frac{e}{2})$ □

□2□□□□1□□ $1<x_1<2=x_2<x_3<3$ □□ $x-1=u$ □

□ $x_1-1=u_1$ □ $x_2-1=u_2$ □

□□ $g(x)=h(u)=\frac{e^{u-1}}{u}$ □

[illegible]1[illegible] $h(u)$ [illegible] $(0,1)$ [illegible] $(1,2)$ [illegible] $0<u_1<1<u_2<2$ [illegible]

[illegible] $\frac{1}{u_1}>1$ [illegible] $g(\frac{1}{u_1})-g(u_1)=\frac{e^{\frac{1}{u_1}-1}}{\frac{1}{u_1}}-\frac{e^{u_1-1}}{u_1}=u_1e^{\frac{1}{u_1}-1}-\frac{e^{u_1-1}}{u_1}$ [illegible]

[illegible] $F(u_1)=u_1e^{\frac{1}{u_1}-1}-\frac{e^{u_1-1}}{u_1}$ [illegible] $F'(u_1)=\frac{(u_1-1)(u_1e^{\frac{1}{u_1}-1}-e^{u_1-1})}{u_1^2}$ [illegible]

[illegible] $e^{\frac{1}{u_1}-1}>\frac{1}{u_1}$ [illegible]

$\therefore u_1e^{\frac{1}{u_1}-1}>1$ [illegible]

[illegible] $0<u_1<1$ [illegible]

$\therefore e^{u_1-1}<1$ [illegible]

$\therefore u_1e^{\frac{1}{u_1}-1}-e^{u_1-1}>0$ [illegible]

$\therefore F'(u_1)<0$ [illegible]

$\therefore F(u_1)$ [illegible] $(0,1)$ [illegible]

$\therefore F(u_1)>F$ [illegible]1[illegible] $=0$ [illegible]

$\therefore g(\frac{1}{u_1})>g(u_1)=g(u_2)$ [illegible]

$\therefore \frac{1}{u_1}>u_2$ [illegible]

$\therefore u_1u_2<1$ [illegible]

$\therefore (x_1-1)(x_2-1)<1$ [illegible] $x_1x_2<x_1+x_2$ [illegible]

25□□2021•□□□□□□□□□ $f(x)=ke^x-x$□

□1□□□ $f(x)$ □□□□□

□2□□□□ $g(x)=xf(x)-3ke^x-\frac{1}{3}x^3+2x^2$ □□□□□□ x_1□x_2□x_3□□□□ k□□□□□□□□□ $x_1+x_2+x_3>4$□

□□□□□□□1□ $f'(x)=ke^x-1$□

□ $k\leqslant 0$ □□ $f'(x)<0$□ $f(x)$ □ $(-\infty,+\infty)$ □□□□□

□ $k>0$ □□□ $f'(x)=0$ □□ $x=-lnk$□

□ $x\in(-\infty,-lnk)$ □□ $f'(x)<0$ □□ $x\in(-lnk,+\infty)$ □□ $f'(x)>0$□

□ $f(x)$ □ $(-\infty,-lnk)$ □□□□□□ $(-lnk,+\infty)$ □□□□□

□2□□□□□ $g(x)=ke^x(x-3)-\frac{1}{3}x^3+x^2$□ $g'(x)=(x-2)(ke^x-x)$□

□ $g'(x)=0$ □□ $x=2$ □ $ke^x-x=0$□

□□□□ $g(x)$ □□□□□□□□ $g'(x)=0$ □□□□□□□□□□□□□ $ke^x-x=0$ □□□□□2□□□□□□□ $x_1<x_2$□$x_3=2$□

□□1□□□ $k>0$ □□ $f(x)_{min}=f(-lnk)=1+lnk<0$ □□□ $0<k<\frac{1}{e}$□

□□ $0<k<\frac{1}{e}$ □□ $f(0)=k>0$□ f□1□ $=ke-1<0$□ $f(-2lnk)=\frac{1}{k}+2lnk>0$□

□□□□□□□□ $0<x_1<1<x_2$□

□□ $x=2$ □□ $k=\frac{2}{e^2}$ □□□□□ k □□□□□□ $(0,\frac{2}{e^2})\cup(\frac{2}{e^2},\frac{1}{e})$□

□□ $x_1+x_2+x_3>4$ □□□□ $x_1+x_2>2$□①

□□ x_1□x_2□ $ke^x-x=0$ □□□□□□□ $0<x_1<1<x_2$□

□□ $\frac{x_1}{e^{x_1}}=\frac{x_2}{e^{x_2}}$ □□□ $\frac{x_1}{x_2}=e^{x_1-x_2}$ □□□ $ln\frac{x_1}{x_2}=x_1-x_2$ □

□ $\frac{x_1}{x_2}=t$ □□ $x_1=\frac{tlnt}{t-1}$ □ $x_2=\frac{lnt}{t-1}$ □ $t\in(0,1)$ □

□□①□□□□□□□ $\frac{tlnt}{t-1}+\frac{lnt}{t-1}>2$ □□□ $lnt-\frac{2(t-1)}{t+1}<0$ □ $t\in(0,1)$ □

□ $h(t)=lnt-\frac{2(t-1)}{t+1}$ □ $t\in(0,1)$ □□ $h'(t)=\frac{2(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$ □□□ $h(t)$ □ $(0,1)$ □□□

□□ $h(t)<h$ □1□ $=0$ □□□ $lnt-\frac{2(t-1)}{t+1}<0$ □□□□□□

26□□2021•□□□□□□□□ $f(x)=e^x(x-2)-\frac{1}{3}kx^3+\frac{1}{2}kx^2$ □

□1□□ $k=1$ □□ $f(x)$ □□□□□□

□2□□ $f(x)$ □□□□□□□ x_1 □ x_2 □ x_3 □□ $x_1<x_2<x_3$ □□ k □□□□□□□□□□□ $x_1+x_3>2x_2$ □

□□□□□□1□□ $k=1$ □□ $f(x)=e^x(x-2)-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2$ □

$\therefore f'(x)=(e^x-x)(x-1)$ □

□ $h(x)=e^x-x$ □□ $h'(x)=e^x-1$ □

$\therefore$ □ $h'(x)>0$ □ $x>0$ □ $h'(x)<0$ □ $x<0$ □

$\therefore h(x)$ □ $(-\infty,0)$ □□□□□ $(0,+\infty)$ □□□□

$\therefore h(x)\geqslant h(0)=1>0$ □ $e^x-x>0$ □

$\therefore$ □ $f'(x)>0$ □ $x>1$ □□ $f'(x)<0$ □ $x<1$ □

$\therefore f(x)$ □□□□□□□ $(-\infty,1)$ □□□□□□□ $(1,+\infty)$ □

（2）$f'(x)=e^x(x-2)+e^x-kx^2+kx=(e^x-kx)(x-1)$

$f(x)$ ∴ $e^x-kx=0$ 1

$g(x)=e^x-kx$ $k\le 0$ $g(x)$ $g(x)=0$

∴ $k>0$ $g'(x)>0$ $x>\ln k$ $g'(x)<0$ $x<\ln k$

∴ $g(x)$ $(-\infty,\ln k)$ $(\ln k,+\infty)$

∴ $g(\ln k)=e^{\ln k}-k\ln k=k(1-\ln k)<0$ $k>e$

$g(0)=1>0$ $\ln k>1$ $g(1)=e-k<0$ $x\to+\infty$ $g(x)\to+\infty$

∴ $k>e$ $f'(x)=0$ x_1 x_2 x_3 $0<x_1<1=x_2<x_3$

$e^{x_1}=kx_1$ $x_1=\ln k+\ln x_1$ $e^{x_3}=kx_3$ $x_3=\ln k+\ln x_3$

∴ $\frac{\ln x_3-\ln x_1}{x_3-x_1}=1$

$\frac{\ln x_3-\ln x_1}{x_3-x_1}>\frac{2}{x_3+x_1}$ $\ln\frac{x_3}{x_1}>2\frac{\frac{x_3}{x_1}-1}{\frac{x_3}{x_1}+1}$

$t=\frac{x_3}{x_1}>1$ $\varphi(x)=\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}$

$\varphi'(x)=\frac{1}{t}-\frac{4}{(t+1)^2}=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$ ∴ $\varphi(x)$ $(1,+\infty)$

∴ $\varphi(t)>\varphi(1)=0$ ∴ $1=\frac{\ln x_3-\ln x_1}{x_3-x_1}>\frac{2}{x_3+x_1}$

∴ $x_3+x_1>2x_2$

27□□2021•□□□□□□□□□□ $f(x)=\dfrac{e^x+ax^2}{x+1}$ □□□□□□ x_1□x_2□x_3□

□I□□□□ a □□□□□□

□II□□□□ $x_1+x_2+x_3>-2$□

□□□□□□□I□□□ $f(x)$ □□□□□□□□ $f'(x)$ □□□□□□□ $f'(x)=\dfrac{x[e^x+a(x+2)]}{(x+1)^2}$ □ $f'(0)=0$□

□ $g(x)=e^x+a(x+2)$□

□□□□□□ $g(x)=0$ □□□□□0□-1□□□□ $g'(x)=e^x+a$

□ $a\geqslant 0$ □□ $g(x)$ □ R □□□□ $g(x)=0$ □□□□□□□□ $a<0$

$\therefore g(x)$ □ $(-\infty$□$ln(-a))$ □□□□□ $(ln(-a)$□$+\infty)$ □□□□

$$\therefore \begin{cases} g(-1)=\dfrac{1}{e}+a\neq 0 \\ g(0)=1+2a\neq 0 \\ g(x)_{min}=g(ln(-a))=-a+a(ln(-a)+2)<0 \end{cases}$$ □

$\therefore a<-\dfrac{1}{e}$□ $a\neq-\dfrac{1}{2}$□

□□□□II□□□I□□□□ $x_3=0$□$x_1<x_2$□

□ $g(-1)=\dfrac{1}{e}+a<0$□$\therefore x_1<-1<x_2$□

□□ $x_1+x_2+x_3>-2$ □□□ $x_1>-2-x_2$□$x_1<-1$□$-2-x_2<-1$□

□ $g(x)$□$(-\infty$□$ln(-a))$□□□□□$(ln(-a)$□$+\infty)$□□□□□ $ln(-a)>-1$□

□□□□ $g(x_1)<g(-2-x_2)$ □□ $g(x_1)=g(x_2)=0$ □□□□□ $0<g(-2-x_2)$□

□□ $x_2e^{x_2}+(x_2+2)e^{-2-x_2}>0$□

$h(x) = xe^{x} + (x+2)e^{2-x}(x > -1)$

$\therefore h'(x) = (x+1)(e^{x} - e^{2-x}) > 0(x > -1)$

$\therefore h(x) = xe^{x} + (x+2)e^{2-x}(x > -1)$ $\therefore h(x) > h(-1) = 0$

$x_2 e^{x_2} + (x_2+2)e^{2-x_2} > 0$

$\therefore x_1 + x_2 + x_3 > -2$